Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ No. 16ο Date 28/11/2016

Θεώρημα:
Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\bar{f}, \bar{g} : U \to \mathbb{R}^m$, $\phi : U \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες στο $\bar{x} \in U$. Τότε οι $\bar{f}+\bar{g} : U \to \mathbb{R}^m$, $\bar{f}\cdot\bar{g} : U \to \mathbb{R}$ και $\phi\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμες στο $\bar{x}$ με:

α) $D(\bar{f}+\bar{g})(\bar{x}) = D\bar{f}(\bar{x}) + D\bar{g}(\bar{x})$

β) $D(\bar{f}\cdot\bar{g})(\bar{x}) = \bar{g}(\bar{x})^T \cdot D\bar{f}(\bar{x}) + \bar{f}(\bar{x})^T \cdot D\bar{g}(\bar{x})$

γ) $D(\phi\cdot\bar{f}(\bar{x})) = \phi(\bar{x}) \cdot D\bar{f}(\bar{x}) + \bar{f}(\bar{x}) \cdot D\phi(\bar{x})$

$\bar{f}(\bar{x})^T = f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})$

$\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$

απόδειξη
α) Είχαμε ~~...~~ δει ότι αν $\bar{f}, \bar{g}$ είναι μερικώς διαφ. στο $\bar{x}$, τότε $J_{\bar{f}+\bar{g}}(\bar{x}) = J_{\bar{f}}(\bar{x}) + J_{\bar{g}}(\bar{x})$
Επειδή εδώ $\bar{f}+\bar{g}$ είναι διαφορίσιμες έχουμε $J_{\bar{f}}(\bar{x}) = D\bar{f}(\bar{x})$ στο $\bar{x}$

$J_{\bar{g}}(\bar{x}) = D\bar{g}(\bar{x})$

Πρέπει να αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \frac{(\bar{f}+\bar{g})(\bar{x}+\bar{h}) - (\bar{f}+\bar{g})(\bar{x}) - (D\bar{f}(\bar{x}) + D\bar{g}(\bar{x}))\bar{h}}{\|\bar{h}\|} = \bar{0}$$

$$\xLeftarrow{\text{αλγεβρ. ορίων}} \lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{f}(\bar{x})}{\|\bar{h}\|} = \bar{0}$$

και αντίστοιχα για την g.

ΤΟ ΒΑΣΙΚΟΤΕΡΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΑΛ ΙΙΙ

Θεώρημα: (ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ)
Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ ανοικτά, $\bar{f} : U \to \mathbb{R}^m$, $\bar{f}(U) \subset V$, $\bar{g} : V \to \mathbb{R}^k$ και έστω ότι η $\bar{f}$ είναι διαφορίσιμη στο $\bar{x} \in U$, η $\bar{g}$ είναι διαφορίσιμη στο $\bar{y} := \bar{f}(\bar{x})$. Τότε η σύνθεση $\bar{g}\circ\bar{f} : U \to \mathbb{R}^k$ είναι διαφορίσιμη στο $\bar{x}$ με παράγωγο

$$\boxed{\underbrace{D(\bar{g}\circ\bar{f})(\bar{x})}_{\in \mathbb{R}^{k\times n}} = \underbrace{D\bar{g}(\bar{f}(\bar{x}))}_{\in \mathbb{R}^{k\times m}} \cdot \underbrace{D\bar{f}(\bar{x})}_{\in \mathbb{R}^{m\times n}}}$$

[[Ο τύπος αυτός και το θεώρημα φυσικά ισχύει $\forall n, m, k \in \mathbb{N}$
Άρα ισχύει και στη γνωστή περίπτωση $n = m = k = 1$]]

Είναι σημαντικό να την καταλάβεις ⊛⊛⊛

απόδειξη (δες την από σημειώσεις)

V ανοικτό $\Rightarrow \exists \delta_1>0: B(\bar{y},\delta_1)\subset V$

U ανοικτό και $\bar{f}$ συνεχής στο $\bar{x}\in U$.

$\Rightarrow \exists \delta_2>0: B(\bar{x},\delta_2)\subset U$ και $\bar{f}(B(\bar{x},\delta_2))\subset B(\bar{y},\delta_1)$

διότι: $\bar{f}$ συνεχής στο $\bar{x}$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall \bar{z}\in B(\bar{x},\delta): \|f(\bar{x})-f(\bar{z})\|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall \bar{z}\in B(\bar{x},\delta): \bar{f}(\bar{z})\in B(\bar{f}(\bar{x}),\varepsilon)$

$\Leftrightarrow \bar{f}(B(\bar{x},\delta))\subset B(\underbrace{\bar{f}(\bar{x})}_{\bar{y}},\varepsilon)$

Έστω στα επόμενα:

$\bar{h}\in B(\bar{0},\delta_2)\setminus\{0\}\subset \mathbb{R}^n$ και $\bar{k}\in B(\bar{0},\delta_1)\setminus\{\bar{0}\}\subset\mathbb{R}^m$

$\Rightarrow \bar{x}+\bar{h}\in B(\bar{x},\delta_2)\setminus\{\bar{x}\}\subset U$

$\bar{f}(\bar{x}+\bar{h})\in B(\bar{y},\delta_1)\subset V$

$\bar{y}+\bar{k}\in B(\bar{y},\delta_1)\setminus\{\bar{y}\}\subset V$

[Όλα αυτά έγιναν ούτως ώστε όλες οι τιμές των συναρτήσεων στα επόμενα να είναι καλά ορισμένες]

Αν $A=D\bar{f}(\bar{x})$, $B=D\bar{g}(\bar{f}(\bar{x}))$

Θδο $\lim_{\bar{h}\to\bar{0}}\dfrac{(\bar{g}\circ\bar{f})(\bar{x}+\bar{h})-(\bar{g}\circ\bar{f})(\bar{x})-BA\bar{h}}{\|\bar{h}\|}=\bar{0}$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{\bar{h}\to\bar{0}}\dfrac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{h})-\bar{f}(\bar{x})-A\bar{h}}{\|\bar{h}\|}=\bar{0}$

και $\lim_{\bar{k}\to\bar{0}}\dfrac{\bar{g}(\bar{y}+\bar{k})-\bar{g}(\bar{y})-B\bar{k}}{\|\bar{k}\|}=\bar{0}$ $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{f}(\bar{x}+\bar{h})=\bar{f}(\bar{x})+A\bar{h}+\bar{\Phi}(\bar{h})$ με $\lim_{\bar{h}\to\bar{0}}\dfrac{\bar{\Phi}(\bar{h})}{\|\bar{h}\|}=\bar{0}$

και $\bar{g}(\bar{y}+\bar{k})=\bar{g}(\bar{y})+B\bar{k}+\bar{\psi}(\bar{k})$ με $\lim_{\bar{k}\to\bar{0}}\dfrac{\bar{\Psi}(\bar{k})}{\|\bar{k}\|}=\bar{0}$

(Από εδώ και κάτω χωρίς παύλες) $\Rightarrow (g\circ f)(x+h)=g(f(x+h))=$

$=g(\underbrace{f(x)}_{y}+\underbrace{Ah+\phi(h)}_{k})=$

$=g(f(x))+B(Ah+\phi(h))+\psi(Ah+\phi(h))$.

No. Date

Άρα έχουμε τελειώσει αν δείξουμε:

$$\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \frac{B\Phi(u) + \psi(Au+\Phi(u))}{\|\bar{u}\|} = \bar{0}$$

όπου έχουμε $\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \frac{\Phi(u)}{\|u\|} = \bar{0}$ και $\lim_{\bar{\xi}\to\bar{0}} \frac{\psi(\bar{\xi})}{\|\bar{\xi}\|} = \bar{0}$

Όμως ισχύει $\lim_{u\to 0} \frac{B\Phi(u)}{\|u\|} = 0$

αφού $\lim_{\bar{\xi}\to\bar{0}} \underbrace{B\bar{\xi}}_{\bar{f}(\bar{\xi})} = 0$ και $0 < \|B\bar{\xi}\| < \|B\|\,\|\bar{\xi}\|$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \bar{g}(\bar{u}) = \bar{0}}_{\Leftrightarrow\, \bar{u}_\nu\to 0 \Rightarrow \bar{g}(\bar{u}_\nu)\to\bar{0}} \quad \text{και} \quad \underbrace{\lim_{\bar{\xi}\to\bar{0}} \bar{f}(\bar{\xi}) = \bar{0}}_{\Leftrightarrow\, \bar{\xi}_\nu\to 0 \Rightarrow \bar{f}(\bar{\xi}_\nu)\to 0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \bar{f}(\bar{g}(\bar{u})) = \bar{0}}_{\Leftrightarrow\, \bar{u}_\nu\to 0 \Rightarrow \bar{f}(\bar{g}(\bar{u}_\nu))\to 0}$$

Επίσης, έχουμε $\exists\, \delta_3\in(0,\delta_2): \forall u\in B(0,\delta_2): \|\Phi(u)\|\le\|u\|$

αφού $\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \underbrace{\frac{\bar{\Phi}(\bar{u})}{\|\bar{u}\|}}_{\bar{g}(\bar{u})} = \bar{0} \Leftrightarrow \lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \frac{\|\bar{\Phi}(\bar{u})\|}{\|\bar{u}\|} = 0$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists\delta\ \forall \bar{u}\in B(0,\delta): \frac{\|\bar{\Phi}(\bar{u})\|}{\|\bar{u}\|} < \varepsilon$

$\xRightarrow{\varepsilon=1} \exists\,\delta>0\ \forall\bar{u}\in B(\bar{0},\delta): \|\bar{\Phi}(\bar{u})\| \le \|\bar{u}\|$

και από την άλλη έχουμε $\psi(\bar{\xi}) = \|\bar{\xi}\|\,\psi_1(\bar{\xi})$ με $\lim_{\bar{\xi}\to 0}\psi_1(\bar{\xi}) = 0$

Θέλω να εξετάσω (και τέλος)

$$\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \frac{\psi(Au+\Phi(u))}{\|u\|} = 0 \Rightarrow \lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \underbrace{\frac{\|\psi(Au+\Phi(u))\|}{\|u\|}}_{= \frac{\|Au+\Phi(u)\|\cdot\|\psi_1(Au+\Phi(u))\|}{\|\bar{u}\|}} = 0$$

No.

$$\leq (\|A\| + 1) \|\Psi_u (Au + \Phi(u))\|.$$

$\vdash\!\dashv$